

**Geometria analityczna i różniczkowa
w zadaniach**

Geometria analityczna i różniczkowa w zadaniach

Jolanta Dymkowska

Danuta Beger

Przewodniczący Komitetu Redakcyjnego
Wydawnictwa Politechniki Gdańskiej

Dariusz Mikieliewicz

Recenzent

Andrzej Nowik

Redakcja językowa

Agnieszka Frankiewicz

Projekt okładki

Wioleta Lipska-Kamińska

Przygotowanie do druku

Danuta Beger, Jolanta Dymkowska

Wydano za zgodą

Rektora Politechniki Gdańskiej

Oferta wydawnicza Politechniki Gdańskiej jest dostępna pod adresem
<https://www.sklep.pg.edu.pl>

Utwór w całości lub we fragmentach nie może być powielany ani rozpowszechniany
w jakiegokolwiek formie i w jakikolwiek sposób bez pisemnej zgody posiadaczy praw autorskich.

© Copyright by Politechnika Gdańska,
Centrum Matematyki, Gdańsk 2023

ISBN 978-83-7348-894-6

Spis treści

Przedmowa	7
1. Wektory w \mathbb{R}^3	9
1.1. Wektory. Działania na wektorach	9
Pojęcia wstępne	9
Iloczyn skalarny wektorów	14
Iloczyn wektorowy wektorów	17
Iloczyn mieszany wektorów	20
1.2. Liniowa niezależność wektorów	23
Liniowa niezależność wektorów	23
Baza przestrzeni \mathbb{R}^3 . Współrzędne wektora w bazie	25
1.3. Zadania do samodzielnego rozwiązania	26
2. Prosta i płaszczyzna w \mathbb{R}^3	33
2.1. Płaszczyzna	33
2.2. Prosta	38
2.3. Punkty, proste, płaszczyzny	42
Wzajemne położenie punktu i płaszczyzny	43
Wzajemne położenie punktu i prostej	46
Wzajemne położenie dwóch płaszczyzn	49
Wzajemne położenie prostej i płaszczyzny	51
Wzajemne położenie dwóch prostych	53
2.4. Zadania przykładowe	58
2.5. Zadania do samodzielnego rozwiązania	64
3. Powierzchnie stopnia drugiego	81
3.1. Równania powierzchni stopnia drugiego	81
Elipsoida i sfera	82
Hiperboloida jednopowłokowa	83
Hiperboloida dwupowłokowa	84
Stożek	85
Paraboloida eliptyczna	86
Paraboloida hiperboliczna	86

Powierzchnie walcowe	87
3.2. Zadania przykładowe	89
3.3. Zadania do samodzielnego rozwiązania	96
4. Elementy geometrii różniczkowej	101
4.1. Trójścian Freneta	101
Funkcja wektorowa i jej pochodne	101
Wektor styczny, normalny i binormalny	105
Trójścian Freneta	109
4.2. Krzywizna i skręcenie krzywej	116
Krzywizna krzywej	116
Okrąg ściśle styczny	120
Skręcenie krzywej	122
4.3. Zadania do samodzielnego rozwiązania	127
Krzywe stożkowe	135
Elipsa	135
Hiperbola	136
Parabola	138
Krzywe stopnia drugiego	139
Krzywe algebraiczne i przestępne	143
Cykloida	143
Epicykloida	144
Hipocykloida	145
Lemniskata	146
Rozety	147
Spirale	148
Liść Kartezjusza	149
Odpowiedzi do zadań	151
Bibliografia	173

Przedmowa

Geometria jest więc w istocie niczym innym, jak tylko abstrakcją linii, powierzchni i objętości z kształtów ciał materialnych.

Michał Heller

Podręcznik, który oddajemy do rąk czytelnika, ma stanowić pomoc i uzupełnienie w nauce geometrii analitycznej i różniczkowej zapoczątkowanej na wykładach i ćwiczeniach akademickich.

Każdy rozdział zawiera wyjaśnienie podstawowych pojęć, podaje podstawowe definicje i twierdzenia, które następnie są zilustrowane przykładami z rozwiązaniami. Zakończony jest zestawem zadań do samodzielnego rozwiązania o zróżnicowanym stopniu trudności, co umożliwia korzystanie z podręcznika studentom różnych kierunków studiów i o różnym stopniu zaawansowania wiedzy. W podręczniku zawarłyśmy około 500 zadań do samodzielnego rozwiązania i ponad 100 przykładów z rozwiązaniami.

Przygotowując ten podręcznik, korzystałyśmy z wieloletnich doświadczeń zdobytych w trakcie opracowywania materiałów do zajęć dla studentów Politechniki Gdańskiej. Przygotowując materiały dla studentów, staramy się czerpać z wielkiego dorobku wybitnych matematyków i dydaktyków, zawartych w wielu podręcznikach akademickich.

W tym miejscu szczególne podziękowania kierujemy do naszego kolegi, dr. Krzysztofa Radziszewskiego, którego cenne uwagi i sugestie były inspiracją i pomocą w trakcie pisania podręcznika. Dziękujemy też naszym koleżankom i kolegom z Centrum Matematyki Politechniki Gdańskiej za wsparcie i życzliwość.

Chcemy także podziękować studentom Politechniki Gdańskiej, którzy uczestniczyli w prowadzonych przez nas wykładach oraz ćwiczeniach i którzy wnieśli swoje uwagi w trakcie przygotowywania książki do druku.

Naszym studentom i wszystkim, którzy będą zgłębiać tajniki geometrii, korzystając z niniejszej książki, dedykujemy słowa niemieckiego romantyka Novalisa: „Bez entuzjazmu nie ma matematyki”.

Autorki